

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	01 – 11 – 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελ. 114 σχολ.

A2. Σελ. 74 σχολ.

A3. α) / β) Σελ. 104 σχολ.

A4. α) Σωστό, β) Λάθος, γ) Λάθος, δ) Σωστό, ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. Εφόσον η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη

$$-2, \text{ τότε } f(-2)=0 \Leftrightarrow \alpha - \frac{10}{(-2)^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

Επίσης f συνεχής στο 1, άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(2 - \frac{10}{x^2 + 1} \right) = 2 - 5 = -3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2\sqrt{x-1} + \beta) = \beta \text{ και } f(1) = \beta.$$

Συνεπώς $\alpha = 2$ και $\beta = -3$.

$$\mathbf{B2.} \text{ Είναι } f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{10}{x^2 + 1}, & x < 1 \\ 2\sqrt{x-1} - 3, & x \geq 1 \end{cases}. \text{ Στο } A_1 = [1, +\infty) \text{ είναι } f(x) = 2\sqrt{x-1} - 3.$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in A_1 = [1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} \Rightarrow 2\sqrt{x_1 - 1} < 2\sqrt{x_2 - 1}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x_1 - 1} - 3 < 2\sqrt{x_2 - 1} - 3, \text{ δηλαδή } f(x_1) < f(x_2). \text{ Άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

στο $A_1 = [1, +\infty)$, οπότε 1-1, δηλαδή αντιστρέφεται.

Έχουμε λοιπόν την εξίσωση $y = f(x)$. Άρα:

$$y = 2\sqrt{x-1} - 3 \Leftrightarrow y + 3 = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{y+3}{2}.$$

$$\text{Εφόσον } \sqrt{x-1} \geq 0, \text{ τότε και } \frac{y+3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow y+3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -3.$$

Άρα για κάθε $y \geq -3$ είναι:

$$\sqrt{x-1} = \frac{y+3}{2} \Leftrightarrow x-1 = \left(\frac{y+3}{2} \right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{(y+3)^2}{4} + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y^2 + 6y + 13}{4}.$$

$$\text{Δηλαδή } y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y^2 + 6y + 13}{4}, y \in [-3, +\infty).$$

$$\text{Άρα ο τύπος της αντίστροφης είναι ο } f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 13), x \geq -3.$$

B3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) - 2f(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-3, -1)$. Ισχύει όμως ότι:

$$f^{-1}(-3) = \frac{1}{4}((-3)^2 + 6(-3) + 13) = \frac{9 - 18 + 13}{4} = 1, \quad f(-3) = 2 - \frac{10}{(-3)^2 + 1} = 1,$$

$$f^{-1}(-1) = \frac{1}{4}((-1)^2 + 6(-1) + 13) = \frac{1 - 6 + 13}{4} = 2 \quad \text{και} \quad f(-1) = 2 - \frac{10}{(-1)^2 + 1} = -3.$$

Θέτουμε $g(x) = f^{-1}(x) - 2f(x)$, $x \geq -3$ η οποία:

- είναι συνεχής στο $[-3, -1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- μας δίνει $g(-3) = f^{-1}(-3) - 2f(-3) = 1 - 2 \cdot 1 = -1$ και

$$g(-1) = f^{-1}(-1) - 2f(-1) = 2 - 2 \cdot (-3) = 8. \text{ Δηλαδή } g(-3)g(-1) < 0.$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-3, -1)$

$$\text{τέτοιο, ώστε να ισχύει } g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x_0) - 2f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x_0) = 2f(x_0).$$

Δηλαδή η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-3, -1)$.

B4. (i) Για $x \geq -3$ είναι $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 13)$. Η παράγωγος της f^{-1} είναι:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 13)' = \frac{2x + 6}{4} = \frac{x + 3}{2}. \text{ Άρα } (f^{-1})'(-1) = \frac{-1 + 3}{2} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) Είναι } \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{f^{-1}(x)}{x+1} - \frac{2x+2}{(x+1)^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{f^{-1}(x)}{x+1} - \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{f^{-1}(x)}{x+1} - \frac{2}{x+1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x) - 2}{x+1} \stackrel{f^{-1}(-1)=2}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(-1)}{x - (-1)} = (f^{-1})'(-1) = 1. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισοδύναμα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = \ln(e^x + 1) - x = \ln(e^x + 1) - \ln e^x = \ln \frac{e^x + 1}{e^x} = \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right).$$

α. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow \frac{1}{e^{x_1}} > \frac{1}{e^{x_2}} \Rightarrow 1 + \frac{1}{e^{x_1}} > 1 + \frac{1}{e^{x_2}} \Rightarrow \ln \left(1 + \frac{1}{e^{x_1}} \right) > \ln \left(1 + \frac{1}{e^{x_2}} \right),$$

δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x) = \left(\ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) \right)' = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)' = \frac{1}{\frac{e^x + 1}{e^x}} \cdot \left(-\frac{1 \cdot e^x}{e^{2x}} \right) = -\frac{1}{e^x + 1}.$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{x_1} + 1} > \frac{1}{e^{x_2} + 1} \Rightarrow -\frac{1}{e^{x_1} + 1} < -\frac{1}{e^{x_2} + 1},$$

δηλαδή $f'(x_1) < f'(x_2)$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. i) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)$, οπότε αν θέσουμε $t = 1 + \frac{1}{e^x}$, τότε θα είναι

$$t_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) = 1 \text{ (αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0), \text{ δηλαδή:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 1} \ln t = 0. \text{ Για το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(f(x)) - 1}{f(x)}, \text{ θέτουμε } f(x) = u, \text{ οπότε θα}$$

$$\text{είναι } u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \text{ Το όριο γίνεται } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(f(x)) - 1}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u - 1}{u} = 0.$$

ii) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)$, οπότε αν θέσουμε $t = 1 + \frac{1}{e^x}$, τότε θα είναι

$$t_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) = +\infty \text{ (αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ και } e^x > 0), \text{ δηλαδή:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty.$$

$$\text{Άρα για το } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{f(x)} \right) \right], \text{ θέτουμε } \frac{1}{f(x)} = u, \text{ οπότε θα είναι}$$

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0. \text{ Το όριο γίνεται } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{f(x)} \right) \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \cdot \eta\mu u = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

iii) Για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \sqrt{f^2(x) + f(x)} \right]$, θέτουμε $f(x) = u$, οπότε θα είναι

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty. \text{ Το όριο γίνεται:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \sqrt{f^2(x) + f(x)} \right] = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[u - \sqrt{u^2 + u} \right] = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{u^2 - (\sqrt{u^2 + u})^2}{u + \sqrt{u^2 + u}} \right] =$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{u^2 - u^2 - u}{u + |u| \sqrt{1 + \frac{1}{u}}} \right] \stackrel{u > 0}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{-u}{u + u \sqrt{1 + \frac{1}{u}}} \right] = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{-u}{u \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{u}} \right)} \right] =$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{u}}} \right] = -\frac{1}{2}.$$

Γ3. i) Είναι $f'(x) = -\frac{1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και η δεύτερη παράγωγος:

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{e^x + 1} \right)' = - \left(\frac{-1 \cdot (e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} \right) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}, x \in \mathbb{R}. \text{ Συνεπώς:}$$

$$g(x) = f'(x) + (e^x + 1)f''(x) = -\frac{1}{e^x + 1} + (e^x + 1) \cdot \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = -\frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} =$$

$$= \frac{e^x - 1}{e^x + 1}. \text{ Άρα } g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$$g'(x) = \frac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Το ζητούμενο όριο γίνεται: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0) + g(0) - g(3h)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(h) - g(0)}{h} - \frac{g(3h) - g(0)}{h} \right] = A. \text{ Όμως:}$$

$$- \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0) = \frac{2e^0}{(e^0 + 1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$- \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3h) - g(0)}{h} = 3 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3h) - g(0)}{3h} \stackrel{u=3h}{=} 3 \cdot \lim_{u_0 = \lim_{h \rightarrow 0} 3h = 0} \frac{g(u) - g(0)}{u} = 3 \cdot g'(0) = \frac{3}{2}$$

Άρα το ζητούμενο όριο γίνεται: $A = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1.$

Γ4. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση:

$$f'(x) = \frac{3f'(x_1) + 2f'(x_2)}{5} \Leftrightarrow 5f'(x) = 3f'(x_1) + 2f'(x_2) \Leftrightarrow 5f'(x) - 3f'(x_1) - 2f'(x_2) = 0,$$

έχει μια μοναδική ρίζα $x_0 \in (x_1, x_2)$.

Θέτουμε $h(x) = 5f'(x) - 3f'(x_1) - 2f'(x_2)$, η οποία:

- είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- δίνει $h(x_1) = 5f'(x_1) - 3f'(x_1) - 2f'(x_2) = 2f'(x_1) - 2f'(x_2) = 2(f'(x_1) - f'(x_2))$
και $h(x_2) = 5f'(x_2) - 3f'(x_1) - 2f'(x_2) = 3f'(x_2) - 3f'(x_1) = -3(f'(x_1) - f'(x_2))$

Δηλαδή $h(x_1)h(x_2) = -6(f'(x_1) - f'(x_2))^2 < 0$, αφού $x_1 < x_2 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1) < f'(x_2)$,

άρα $f'(x_1) - f'(x_2) < 0$, οπότε $(f'(x_1) - f'(x_2))^2 \neq 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{3f'(x_1) + 2f'(x_2)}{5}.$$

Η ρίζα αυτή όμως είναι μοναδική, αφού η f' είναι γνησίως μονότονη.

Άρα η εξίσωση $f'(x) = \frac{3f'(x_1) + 2f'(x_2)}{5}$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (x_1, x_2)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $\frac{f(x) + x^2 + 2x - 11}{x^2 - 4} = g(x)$, οπότε θα είναι $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{9}{4}$.

Κοντά στο 2 έχουμε:

$$\frac{f(x) + x^2 + 2x - 11}{x^2 - 4} = g(x) \Leftrightarrow f(x) + x^2 + 2x - 11 = g(x) \cdot (x^2 - 4)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot (x^2 - 4) - x^2 - 2x + 11. \text{ Άρα θα είναι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [g(x) \cdot (x^2 - 4) - x^2 - 2x + 11] = \frac{9}{4} \cdot (2^2 - 4) - 2^2 - 2 \cdot 2 + 11 = 3.$$

Όμως η f είναι συνεχής στο 2 οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow f(2) = 3$.

Επίσης θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) \cdot (x^2 - 4) - x^2 - 2x + 11 - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{g(x) \cdot (x^2 - 4)}{x - 2} - \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{g(x) \cdot (x - 2)(x + 2)}{x - 2} - \frac{(x - 2)(x + 4)}{x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} [g(x) \cdot (x + 2) - (x + 4)] = \frac{9}{4} \cdot 4 - 6 = 3. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 με παράγωγο $f'(2) = 3$.

Δ2. i) Ισχύει ότι $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνεχής f' διατηρεί σταθερό το πρόσημό της στο $\mathbb{R}$. Εφόσον $f'(2) = 3 > 0$, τότε θα είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x^4 + f'(x)x^{2025}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)x^{2025} = -\infty$, αφού $f'(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2025} = -\infty$.

ii) Είναι $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3)$, άρα το όριο γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(g \circ f)(x) - g(3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(2)}{x - 2} = (g \circ f)'(2).$$

Όμως είναι $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε για $x = 2$, θα είναι

$$(g \circ f)'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) = 3g'(3) = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(g \circ f)(x) - g(3)}{x - 2} = 1.$$

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$h^2(x) = 4e^x h(x) \Leftrightarrow h^2(x) - 4e^x h(x) = 0 \Leftrightarrow h^2(x) - 4e^x h(x) + 4e^{2x} = 4e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow (h(x) - 2e^x)^2 = 4e^{2x} \Leftrightarrow \sqrt{(h(x) - 2e^x)^2} = \sqrt{4e^{2x}} \Leftrightarrow |h(x) - 2e^x| = 2e^x.$$

Αν θέσουμε όμως $\Phi(x) = h(x) - 2e^x$, τότε η τελευταία θα γίνει: $|\Phi(x)| = 2e^x$ (1).

Είναι $2e^x > 0$, άρα και $|\Phi(x)| > 0$, δηλαδή $\Phi(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε η συνεχής συνάρτηση Φ διατηρεί σταθερό το πρόσημό της στο $\mathbb{R}$.

Για $x = 0$, θα είναι $\Phi(0) = h(0) - 2e^0 = 4 - 2 = 2 > 0$. Άρα $\Phi(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η (1) γίνεται: $|\Phi(x)| = 2e^x \Leftrightarrow \Phi(x) = 2e^x \Leftrightarrow h(x) - 2e^x = 2e^x \Leftrightarrow h(x) = 4e^x, x \in \mathbb{R}$.

Δ4. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\frac{h(x)}{2x-1} + \frac{f'(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow xh(x) + (2x-1)f'(x) = 0$ έχει

μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$. Θέτουμε $K(x) = xh(x) + (2x-1)f'(x)$, η οποία:

- είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- μας δίνει $K(0) = -f'(0) < 0$ και $K(1) = h(1) + f'(1) = 4e + f'(1) > 0$, διότι όπως δείξαμε παραπάνω είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f'(1), f'(0) > 0$

Άρα $K(0)K(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$K(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 h(x_0) + (2x_0 - 1)f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{h(x_0)}{2x_0 - 1} + \frac{f'(x_0)}{x_0} = 0.$$

Δηλαδή η εξίσωση $\frac{h(x)}{2x-1} + \frac{f'(x)}{x} = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.